

In der theoretischen Informatik (und nicht nur dort) wird die Fakultätsfunktion sehr häufig benötigt. Bei genauer Betrachtung ist diese jedoch eine recht unhandliche Funktion:

Definition 1 (Fakultätsfunktion)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet man

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i \tag{I}$$

als Fakultät von n . Es gilt $0! := 1$.

Zumindest in der Informatik reicht jedoch häufig eine Abschätzung des Funktionswertes nach oben bzw. unten. Die exakte Berechnung der zahlreichen Produkte ist je nach Situation entweder nicht effizient oder überhaupt nicht durchführbar. Für diesen Zweck gibt es die *Stirling-Formel*, die für sehr viele Fälle eine ausreichende Genauigkeit liefert.

Nun gut, warum dann diese Arbeit schreiben? Das Problem ist, die *Stirling-Formel* parat zu haben, wenn man sie benötigt. Und da fängt der Spass erst richtig an: je nach Lehrbuch und/oder Professor der Vorlesung versteht man darunter nämlich teilweise vollkommen verschiedene Formeln. Und die Häufigkeit einer Variante in Lehrbüchern ist dabei indirekt proportional zur gelieferten Genauigkeit, auf Deutsch: man findet nur die unnützen Versionen davon, wenn überhaupt.

Dieser Artikel hat deshalb zwei Zielsetzungen. Es wird dargelegt, wie man selbst schnell eine oft ausreichende Abschätzung der Fakultätsfunktion erhält und ergänzt wird dies durch eine (nicht zwingend vollständige) Auflistung von Varianten der *Stirling-Formel*.

Markus John
johm@quyo.de

project: brainstorm.

Halle/Saale
17. September 2005

Für meine Frau, mit Dank an meine Professoren.

Gauss lernt multiplizieren

Wir stehen also vor Gleichung (I) und möchten eine Abschätzung sowohl nach oben als auch nach unten erhalten. Das einfachste Verfahren, eine Summe oder ein Produkt abzuschätzen, ist eine Einzelabschätzung der jeweiligen Summanden bzw. Faktoren. Addiert / Multipliziert man dann die Grenzen der Einzelabschätzungen (was natürlich sehr einfach ist, wenn diese alle identisch sind), so erhält man eine Abschätzung für den ursprünglichen Ausdruck.

Probieren wir doch mal dieses Verfahren an unserem Fakultätsproblem aus:

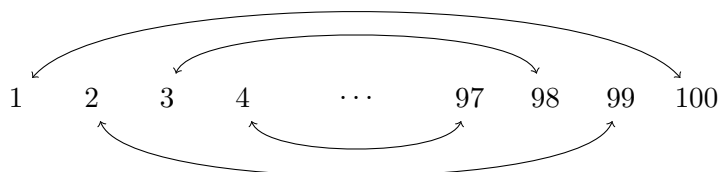
$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \leq n & \cdot & \leq n & \cdot & \leq n & \cdot & \dots & \cdot & \leq n & \cdot & \leq n & \cdot & \leq n & \cdot & \leq n & \cdot & \leq n & = n! \\
 1 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & \dots & \cdot & (n-2) & \cdot & (n-1) & \cdot & n & & & & & \\
 \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \cdot & \dots & \cdot & \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \cdot & \geq 1 & \geq 1
 \end{array}$$

Wir wissen über die einzelnen Faktoren nur, dass jede natürliche Zahl aus dem Intervall $[1, n]$ genau einmal auftritt, jeder Faktor ist also größergleich 1 und kleinergleich n . Zusammengefasst ergibt dies

$$1 \leq n! \leq n^n. \tag{II}$$

Die untere Schranke ist offenbar eine sehr ungenaue (um nicht zu sagen, triviale) Abschätzung und auch die obere Schranke entfernt sich sehr schnell für wachsende n beliebig weit vom exakten Ergebnis. Es gibt jedoch Anwendungsgebiete in der theoretischen Informatik, in denen die obere Schranke schon ausreichend ist. Durch sie erhält man nämlich die interessante Aussage $\log(n!) \in O(n \log n)$. Für andere Probleme benötigen wir jedoch weitaus genauere Abschätzungen.

Wenn man sich die Berechnungsvorschrift der Fakultät ansieht, fällt einem evtl. die Ähnlichkeit zu einem sehr viel einfacheren Problem auf: die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Fast jeder kennt die Geschichte vom kleinen Gauss in der Schule. Sein Lehrer wollte seine Ruhe haben und gab den Schülern deshalb die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 aufzuaddieren. Schon nach wenigen Minuten jedoch meldete sich Gauss und nannte die richtige Lösung. Er hat ein System in der Summe entdeckt und somit eine einfache Berechnungsvorschrift angeben können.



Fasst man die Summanden so wie in der Abbildung zu sehen paarweise zusammen, dann erhält man als Summe für jedes Paar den Wert 101. Die Summe der 50 gebildeten Paare und somit die gesuchte Summe ergibt sich als $101 \cdot 50 = 5050$.

Was passiert nun, wenn man versucht, auf gleichem Wege das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen zu berechnen?

Man wird dabei unweigerlich auf ein Problem treffen. Die Produkte der Paare sind – im Gegensatz zu den Summen der obigen Geschichte – nicht identisch.

$$\begin{aligned}
 n! &= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} i \cdot (n-i+1) & n = 2k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \frac{n+1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{(n-1)/2} i \cdot (n-i+1) & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot \dots \cdot [\frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} + 1)] & n = 2k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot \dots \cdot [\frac{n-1}{2} \cdot (\frac{n+1}{2} + 1)] \cdot \frac{n+1}{2} & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{III})
 \end{aligned}$$

Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden wir stillschweigend davon ausgehen, dass n eine durch 2 teilbare Zahl ist. Möchte man die Fakultät einer ungeraden Zahl abschätzen, könnte man eine analoge Vorgehensweise benutzen oder aber einfach die obere und untere Schranke von $(n-1)!$ mit n multiplizieren.

Betrachten wir nun den oberen Fall der Gleichung (III). Um dieses Produkt abschätzen zu können, untersuchen wir die Monotonie der Folge von Faktoren.

Lemma 2

Die Folge

$$(\alpha_i) := (i \cdot n + i - i^2) = (n, 2n - 2, 3n - 6, \dots)$$

ist für $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ (streng) monoton steigend.

Beweis Untersuchen wir den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} &= \frac{(i+1) \cdot n + (i+1) - (i+1)^2}{i \cdot n + i - i^2} \\
 &= \frac{i \cdot n + n + i - i^2 - 2 \cdot i}{i \cdot n + i - i^2} \\
 &= 1 + \frac{n - 2 \cdot i}{i \cdot (n + 1 - i)} \stackrel{!}{>} 1.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich sind für $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$ sowohl Nenner als auch Zähler des Bruches echt größer als Null und somit die Summe echt größer als Eins. □

Damit erhalten wir eine (nichttriviale) obere und untere Schranke für alle Glieder der Folge, denn es gilt $\alpha_1 \leq \alpha_i \leq \alpha_{n/2}$ für $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ und

$$\begin{array}{ccccccc}
 \leq (\frac{n}{2}+1)^2 & \cdot & \leq (\frac{n}{2}+1)^2 & \cdot & \dots & \cdot & \leq (\frac{n}{2}+1)^2 & \cdot & \leq (\frac{n}{2}+1)^2 & \cdot & \leq (\frac{n}{2}+1)^2 & \cdot & \leq (\frac{n}{2}+1)^n \\
 n & \cdot & 2n - 2 & \cdot & \dots & \cdot & (\frac{n}{2} - 1) \cdot (\frac{n}{2} + 2) & \cdot & \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} + 1) & \cdot & & \cdot & = n! \cdot \\
 \geq n & \cdot & \geq n & \cdot & \dots & \cdot & \geq n & \cdot & \geq n & \cdot & & \cdot & \geq n^{n/2}
 \end{array}$$

Zusammengefasst ergibt dies eine im Vergleich zu (II) sehr viel genauere Abschätzung der Fakultätsfunktion

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^n . \quad (\text{IV})$$

Daraus folgt auch

$$n! \in \Omega\left(n^{n/2}\right) = \Omega\left(\sqrt{n^n}\right) \quad (\text{V})$$

$$n! \in O\left(\left(\frac{n}{2} + 1\right)^n\right) = O\left(\frac{n^n}{2^n}\right) . \quad (\text{VI})$$

Anmerkung: Es ist nicht unbedingt sofort einzusehen, warum der konstante Summand in der O-Notation von (VI) weggelassen werden darf. Dies erhält man jedoch direkt aus der Aussage

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^n}{\frac{n^n}{2^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \\ &\stackrel{m:=n/2}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m} \\ &= e^2 . \end{aligned}$$

Mein Stirling, dein Stirling, Stirling ist für alle da